

4. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung

Wavelet-Transformation

1 Wavelet-Transformation

1.1 Definition

Bei der Short-Time-Fourier-Transformation wurde gezeigt, dass diese als Vergleich des untersuchten Signals $x(t)$ mit einem zeit- und frequenzverschobenen Fenster gedeutet werden kann:

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \left\langle x(t), \gamma(t - \tau) \cdot e^{j2\pi ft} \right\rangle$$

Aus dieser Interpretation geht hervor, dass die Auflösung des Spektrums durch die Zeitdauer Δ_t und die Bandbreite Δ_f des Analysefensters $\gamma(t)$ begrenzt wird. Diese beiden Parameter werden durch die Operationen *Zeitverschiebung* und *Modulation* nicht verändert und sind daher an jeder Stelle des Spektrums gleich.

Dies ist nicht immer sinnvoll: Angenommen, es wird ein Signal untersucht, das Frequenzen der Größenordnung 1 Hz und 1 kHz enthält. Das Zeit-Frequenz-Spektrum sollte in der Lage sein, eine Veränderung des niederfrequenten Anteils um beispielsweise 0,5 Hz aufzulösen. Verändert sich dagegen der hochfrequente Anteil um diese Frequenz, ist diese Information weniger relevant. Dafür müssen für hohe Frequenzen zeitliche Veränderungen besser aufgelöst werden, da hier viel kürzere Periodendauern vorliegen.

Genau diese Anpassung der Zeit- und Frequenzauflösung gelingt mithilfe der Wavelet-Transformation, bei der die Operation *Modulation* durch die Operation *Skalierung* ersetzt wird:

$$W_x^\psi(a, b) = \left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Im Gegensatz zum Analysefenster $\gamma(t)$ bei der STFT ist die mittlere Frequenz des Wavelets $\psi(t)$ von Null verschieden.¹ Im Folgenden bezeichnet t_ψ die mittlere Zeit, f_ψ die mittlere Frequenz, Δ_t die Zeitdauer und Δ_f die Bandbreite des Wavelets $\psi(t)$.

Die Signalenergie des skalierten und zeitverschobenen Wavelets

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

konzentriert sich um folgende Bereiche:

¹ Als Wavelets eignen sich auch reelle Bandpasssignale. Mit diesen ist jedoch ausschließlich eine Analyse reeller Signale möglich.

mittlere Zeit: $t_{\psi a,b} = at_{\psi} + b$

mittlere Frequenz: $f_{\psi a,b} = \frac{f_{\psi}}{a}$

Zeitdauer: $\Delta_{t a,b}^2 = a^2 \Delta_t^2$

Bandbreite: $\Delta_{f a,b}^2 = \frac{1}{a^2} \Delta_f^2$

Mit der Definition $\tau := t_{\psi a,b}$ und $f := f_{\psi a,b}$ wird eine Umrechnung in eine Zeit-Frequenz-Darstellung möglich.

Es gilt:

$$a = \frac{f_{\psi}}{f} \quad b = \tau - \frac{f_{\psi}}{f} \cdot t_{\psi} \quad \frac{t-b}{a} = \frac{f}{f_{\psi}}(t - \tau) + t_{\psi}$$

Daraus folgt:

$$W_x^{\psi}(\tau, f) = \left\langle x(t), \sqrt{\left| \frac{f}{f_{\psi}} \right|} \cdot \psi \left(\frac{f}{f_{\psi}}(t - \tau) + t_{\psi} \right) \right\rangle \quad (1)$$

1.2 Zulässigkeitsbedingung und Energieerhaltung

Erfüllt das Wavelet $\psi(t)$ die Zulässigkeitsbedingung

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < \infty,$$

kann das Innenprodukt der Wavelet-Transformierten $W_x^{\psi}(a,b)$ und $W_y^{\psi}(a,b)$ wie folgt definiert werden:

$$\left\langle W_x^{\psi}(a,b), W_y^{\psi}(a,b) \right\rangle = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^{\psi}(a,b) \cdot \left(W_y^{\psi}(a,b) \right)^* \frac{da db}{a^2}$$

Damit folgt in Analogie zum Satz von Parseval der Energieerhaltungssatz für die Wavelet-Transformation:

$$\langle x(t), y(t) \rangle_t = \left\langle W_x^{\psi}(a,b), W_y^{\psi}(a,b) \right\rangle$$

Wurden die Signale $x(t)$ und $y(t)$ mit unterschiedlichen Wavelets $\psi(t)$ und $\tilde{\psi}(t)$ transformiert, lautet die erweiterte Zulässigkeitsbedingung:

$$C_{\psi\tilde{\psi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi^*(f)\tilde{\Psi}(f)}{|f|} df < \infty$$

Ist sie erfüllt, dann ist das Innenprodukt der Wavelet-Transformierten durch

$$\left\langle W_x^{\psi}(a,b), W_y^{\tilde{\psi}}(a,b) \right\rangle = \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^{\psi}(a,b) \cdot \left(W_y^{\tilde{\psi}}(a,b) \right)^* \frac{da db}{a^2}$$

gegeben und der Energieerhaltungssatz lautet:

$$\left\langle W_x^{\psi}(a,b), W_y^{\tilde{\psi}}(a,b) \right\rangle = \langle x(t), y(t) \rangle_t$$

1.3 Rekonstruktion des Signals

Ein Signal $x(t)$ kann aus seiner Wavelet-Transformierten $W_x^\psi(a,b)$ durch die Rekonstruktionsvorschrift

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot \tilde{\psi}_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

zurückgewonnen werden. Dabei müssen das Analysewavelet $\psi(t)$ und das Synthesewavelet $\tilde{\psi}(t)$ die Zulässigkeitsbedingung $C_{\psi\tilde{\psi}} < \infty$ erfüllen.

1.4 Eigenschaften

Tabelle 1 gibt die Eigenschaften *Translationsinvarianz* und *Affininvarianz* der Wavelet-Transformation wieder.

	Zeitbereich	Bildbereich
Translationsinvarianz	$x_s(t) = x(t - t_s)$	$W_{x_s}^\psi(a,b) = W_x^\psi(a, b - t_s)$
Affininvarianz	$x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{ s }} x\left(\frac{t}{s}\right)$	$W_{x_s}^\psi(a,b) = W_x^\psi\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$

Tabelle 1: Eigenschaften der Wavelet-Transformation

2 Wavelet-Reihen

2.1 Dyadische Wavelet-Reihen

Bei der Berechnung orthogonaler Wavelet-Reihen wird das Analysewavelet dyadisch skaliert und in dyadisch mit dem Skalierungsfaktor anwachsenden Schritten zeitverschoben:

$$a_k = 2^k \quad b_{mk} = m \cdot 2^k \cdot T$$

Das skalierte und zeitverschobene Wavelet lautet dann:

$$\begin{aligned} \psi_{m,k}(t) &= 2^{-k/2} \psi\left(2^{-k}(t - m2^k T)\right) \\ &= 2^{-k/2} \psi\left(2^{-k}t - mT\right) \end{aligned}$$

Die Wavelet-Transformation erhält somit die Form

$$W_x^\psi(m,k) = d_k(m) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) 2^{-k/2} \psi^*(2^{-k}t - mT) dt.$$

Die Rekonstruktion kann als Reihenentwicklung dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_k(m) \tilde{\psi}_{m,k}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_x^\psi(m,k) \tilde{\psi}_{m,k}(t) \end{aligned}$$

Für die Rekonstruktion wird die Biorthonormalität der Analyse- und Synthese-Wavelets vorausgesetzt:

$$\langle \tilde{\psi}_{m,k}(t), \psi_{m',k'}(t) \rangle = \delta(m - m') \cdot \delta(k - k') \quad (2)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die Analyse- und Synthesewavelets gleich sind: $\psi(t) = \tilde{\psi}(t)$. Aus Gl. (2) folgt, dass die Wavelets dann orthonormal sein müssen:

$$\langle \psi_{m,k}(t), \psi_{m',k'}(t) \rangle = \delta(m - m') \cdot \delta(k - k') \quad (3)$$

2.2 Multiraten-Filterbank

Mithilfe einer Multiraten-Filterbank ist eine schnelle Berechnung der Koeffizienten einer dyadischen Wavelet-Reihe möglich. Dies gelingt durch die Ausnutzung von Zwischenergebnissen. Des Weiteren bildet die Multi-Resolution-Analysis die Grundlage für weiterführende Anwendungen der Wavelet-Transformation, beispielsweise bei der Datenkompression oder bei der Filterung zeitvarianter Signale.

2.2.1 Signaldarstellung in Unterräumen

Die Wavelets gleicher Skalierung k bilden aufgrund von Gl. (3) eine orthogonale Basis, die einen Funktionenraum W_k aufspannt. Weiterhin folgt aus Gl. (3), dass die Funktionenräume W_k , $k \in \mathbb{Z}$ zueinander orthogonal sind. Die Energie der Basisvektoren des Funktionenraumes W_k konzentriert sich auf das Frequenzband $[2^{-k} \cdot F, 2^{-k+1} \cdot F]$. Die Projektion $y_k(t)$ eines Signals $x(t)$ auf diesen Funktionenraum, d. h. die Approximation des Signals mithilfe der Basisvektoren

$$y_k(t) = \text{Proj}_{W_k} \{x(t)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_k(m) \psi_{m,k}(t) \in W_k$$

erfasst ausschließlich die Energieanteile von $x(t)$ in diesem Frequenzband.

Neben den Bandpassräumen W_k werden die Tiefpassräume V_k definiert. Diese umfassen den Frequenzbereich $[0, 2^{-k} \cdot F]$ und werden von den so genannten *Skalierungsfunktionen*

$$\begin{aligned} \varphi_{m,k}(t) &= 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}(t - m2^k T)) \\ &= 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}t - mT) \end{aligned}$$

aufgespannt, die ebenfalls eine orthogonale Basis bilden. Die Anordnung der Funktionenräume V_k und W_k ist in Abb. 1 wiedergegeben.

Die Funktionenräume V_k und W_k sollen zueinander orthogonal sein $V_k \perp W_k$. Dies führt zur Biorthogonalitätsbedingung für Wavelets und Skalierungsfunktionen gleicher Skalierung:

$$\langle \psi_{m,k}(t), \varphi_{m',k}(t) \rangle = 0$$

Aus $V_{k-1} = V_k \cup W_k$ folgt, dass die Basisfunktionen von V_{k-1} in die Basisfunktionen von V_k und W_k entwickelt werden können:

$$\varphi_{m,k}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{\text{TP}}(2l - m) \varphi_{l,k+1}(t) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{\text{BP}}(2l - m) \psi_{l,k+1}(t)$$

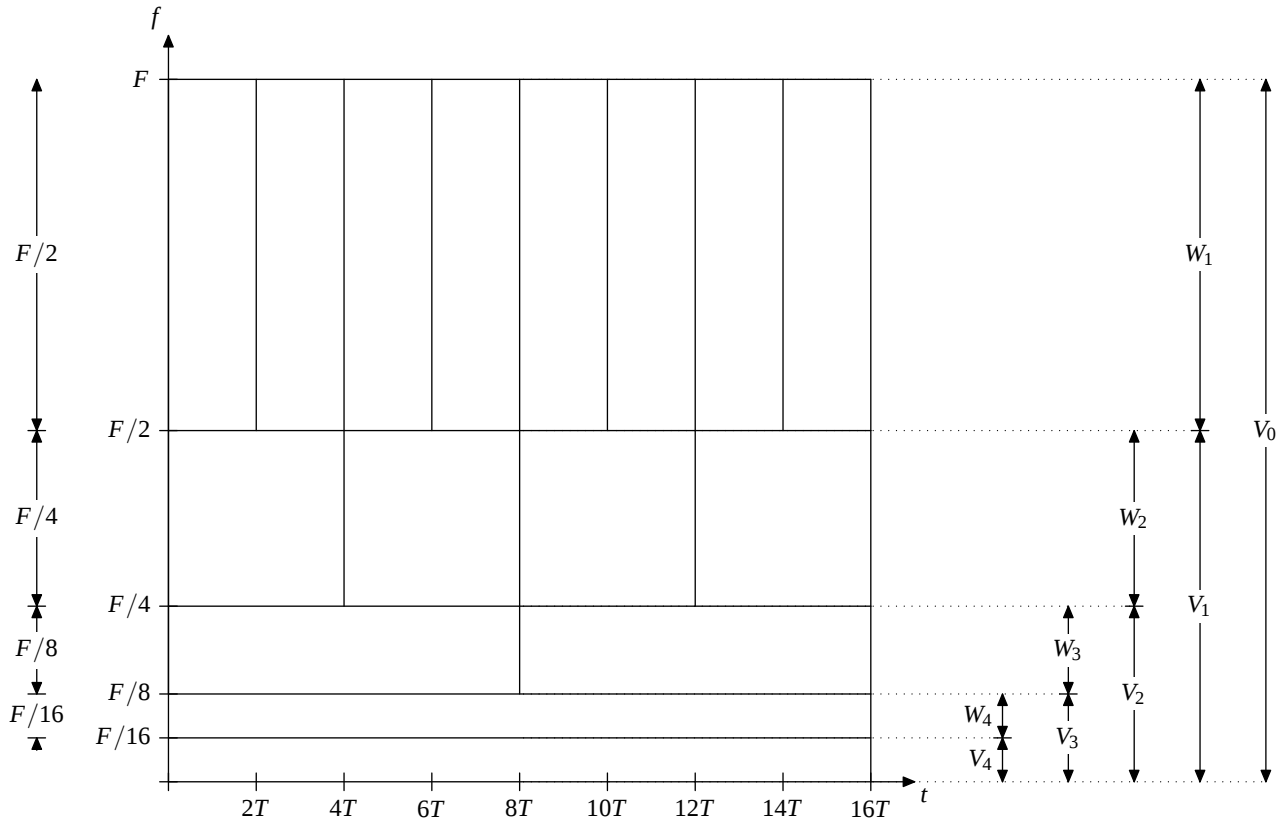


Abbildung 1: Dyadisch skalierte Fenster und Funktionenräume

Später werden die Koeffizienten $g_{\text{TP}}(l)$ bzw. $g_{\text{BP}}(m)$ als Impulsantworten eines zeitdiskreten Tief- bzw. Bandpassfilters interpretiert.

Umgekehrt folgen aus $V_{k+1} \in V_k$ bzw. $W_{k+1} \in V_k$ die Reihenentwicklungen

$$\varphi_{l,k+1}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\text{TP}}(m - 2l) \varphi_{m,k}(t)$$

$$\psi_{l,k+1}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\text{BP}}(m - 2l) \varphi_{m,k}(t)$$

Auch $h_{\text{TP}}(l)$ bzw. $h_{\text{BP}}(m)$ werden später als Impulsantworten eines Tief- bzw. Bandpassfilters interpretiert. Enthält das untersuchte Signal $x(t)$ nur im Frequenzbereich $[0, F]$ relevante Signalanteile, kann gefolgert werden, dass die Projektion in den Funktionenraum V_0 das Signal ausreichend genau approximiert:

$$x_0(t) = \text{Proj}_{V_0} \{x(t)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_0(m) \varphi_{m,0}(t) \in V_0 \quad (4)$$

Aufgrund der Anordnung der Funktionenräume gilt:

$$V_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

daher kann $x_0(t)$ auch mithilfe der Bandpasssignale $y_k(t)$ ausgedrückt werden:

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_k(m) \psi_{m,k}(t)$$

2.2.2 Signalanalyse

Bei der Signalanalyse werden im ersten Schritt die Koeffizienten $c_0(m)$ der Reihenentwicklung des Signals $x(t)$ in die Basisfunktionen des Tiefpassraumes V_0 berechnet (siehe Gl. (4)). Da eine orthogonale Basis vorliegt, gilt:

$$c_0(m) = \langle x(t), \varphi_{m,0}(t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \varphi^*(t - mT) dt \quad (5)$$

Aus diesen Koeffizienten können iterativ die Koeffizienten $c_k(m)$ der Tiefpasssignale $x_k(t)$ (*Approximationen*) und die Koeffizienten $d_k(m)$ der Hochpasssignale $y_k(t)$ (*Details*) berechnet werden:

$$c_{k+1}(l) = c_k(2l) *_{m} g_{\text{TP}}(2l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k(m) g_{\text{TP}}(2l - m)$$

$$d_{k+1}(l) = c_k(2l) *_{m} g_{\text{BP}}(2l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_k(m) g_{\text{BP}}(2l - m)$$

Dies entspricht einer Filterung und einem anschließenden Downsampling um den Faktor 2. Die Struktur der so entstehenden Multiraten-Filterbank zur Signalanalyse ist in Abb. 2 wiedergegeben.

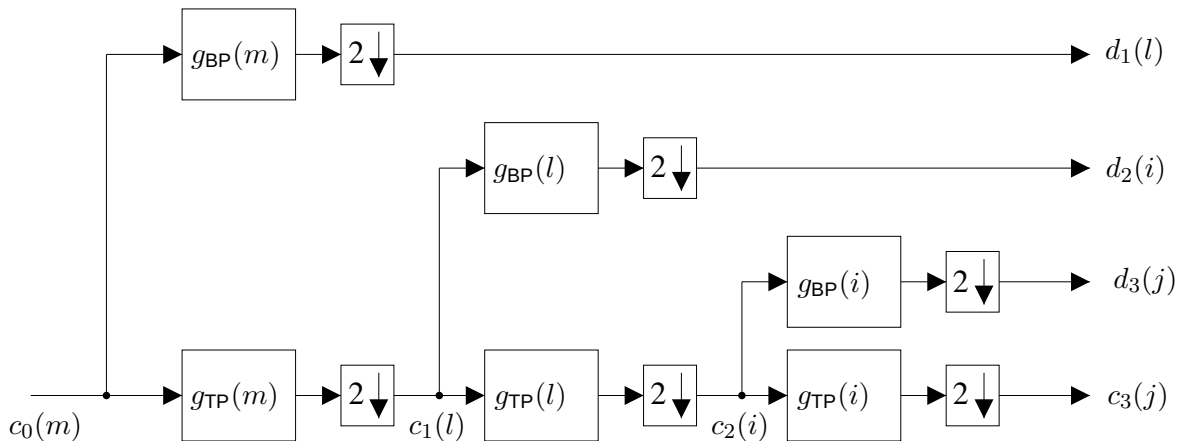


Abbildung 2: Multiraten-Filterbank zur Signalanalyse

2.2.3 Signalsynthese

Um aus den Filterkoeffizienten wieder das Signal zu synthetisieren, werden die Koeffizienten iterativ $c_k(m)$ berechnet:

$$\begin{aligned} c_k(m) &= \left(c_{k+1}(m) *_{2l} h_{\text{TP}}(m) \right) + \left(d_{k+1}(m) *_{2l} h_{\text{BP}}(m) \right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+1}(l) \cdot h_{\text{TP}}(m - 2l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{k+1}(l) \cdot h_{\text{BP}}(m - 2l) \end{aligned}$$

Dies entspricht einem Upsampling um den Faktor 2 (durch Einfügen von Nullen) mit anschließender Filterung. Abb. 3 zeigt die so entstehende Filterbank.

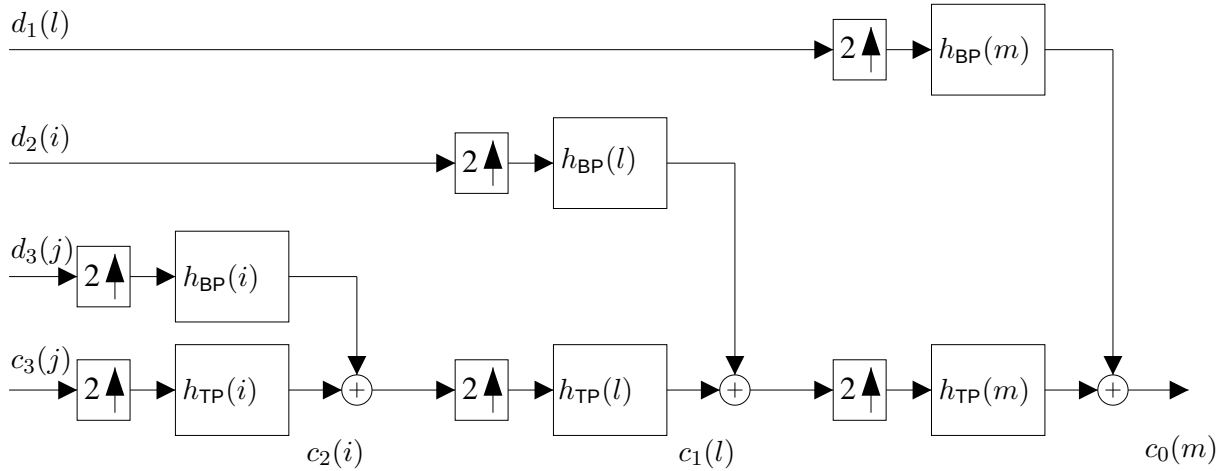


Abbildung 3: Multiraten-Filterbank zur Signalsynthese

Mit Hilfe der Koeffizienten $c_0(m)$ kann schließlich das Signal $x_0(t)$ dargestellt werden:

$$x_0(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_0(m) \varphi_{m,0}(t)$$

Das hier beschriebene Verfahren wird auch als *Fast Wavelet Transformation (FWT)* bezeichnet.

2.2.4 Praktische Anwendung der Multiraten-Filterbank

In der Regel werden in der praktischen Anwendung der Multiraten-Filterbank nicht die Wavelets vorgegeben, sondern die Koeffizienten eines Filters, die je nach Anwendungsfall so gewählt werden können, dass sie gewünschte Eigenschaften erfüllen. Aufgrund der Beziehungen

$$\begin{aligned} h_{TP}(m) &= g_{TP}^*(-m) & h_{BP}(m) &= (-1)^m \cdot h_{TP}^*(1-m) \\ h_{BP}(m) &= g_{BP}^*(-m) & g_{BP}(m) &= (-1)^m \cdot g_{TP}^*(1-m) \end{aligned}$$

genügt die Vorgabe eines einzigen Filters, um die übrigen zu berechnen. Aus den Filterkoeffizienten lassen sich grundsätzlich auch die Verläufe der Skalierungsfunktionen und Wavelets herleiten, allerdings sind diese für die Anwendung nur von untergeordneter Bedeutung.

Des Weiteren liegen in der Praxis häufig bereits abgetastete Signale vor, so dass die Berechnung der Koeffizientenfolge $c_0(m)$ nicht wie in Gleichung (5) erfolgen kann. Hier hilft folgende Überlegung weiter: Der Koeffizient $c_0(m)$ entsteht durch den Vergleich des Signals $x(t)$ mit der Skalierungsfunktion $\varphi_{m,0}(t)$. Der Koeffizient ist also ein Maß für die Signalenergie von $x(t)$ im Frequenzband $0 \leq f \leq F$ und im Zeitbereich um $t = mT$. Wird z. B. das Haar-Wavelet verwendet (d. h. ein Rechteckimpuls als Skalierungsfunktion), entspricht das Innenprodukt gerade dem zeitlichen Mittel der Funktion $x(t)$ im Zeitintervall $(m - \frac{1}{2})T \leq t \leq (m + \frac{1}{2})T$. Bei anderen Wavelets handelt es sich um einen gewichteten Durchschnitt. Die Innenproduktbildung kann somit als eine Art Zeitdiskretisierung interpretiert werden. Liegt also ein Signal in abgetasteter Form vor, werden häufig die Abtastwerte direkt als Koeffizientenfolge $c_0(m)$ verwendet.

2.2.5 Datenkompression

Das beschriebene Verfahren kann zur Datenkompression verwendet werden. So können z. B. Waveletkoeffizienten, deren Wert unterhalb einer definierten Schwelle (*Threshold*) liegen, zu Null gesetzt werden. Die

Signalrekonstruktion ist dann verlustbehaftet. Die Wavelet-Transformation wird beispielsweise zur Fingerabdruckspeicherung oder im Bildformat JPEG2000 eingesetzt.

Beispiel 1 (Analyse eines EKG-Signals)

Abb. 4 zeigt als Beispiel die Analyse eines EKG-Signals mit Hilfe von Haar-Wavelets. Es ist gut erkennbar, wie das Signal in jedem Schritt in eine niederfrequente Approximation (links) und hochfrequente Details (rechts) aufgespalten wird. Die Auflösung wird in jedem Schritt um die Hälfte reduziert. Jedes Subsignal setzt sich aus verschobenen Haar-Wavelets einer festen Skalierung zusammen.

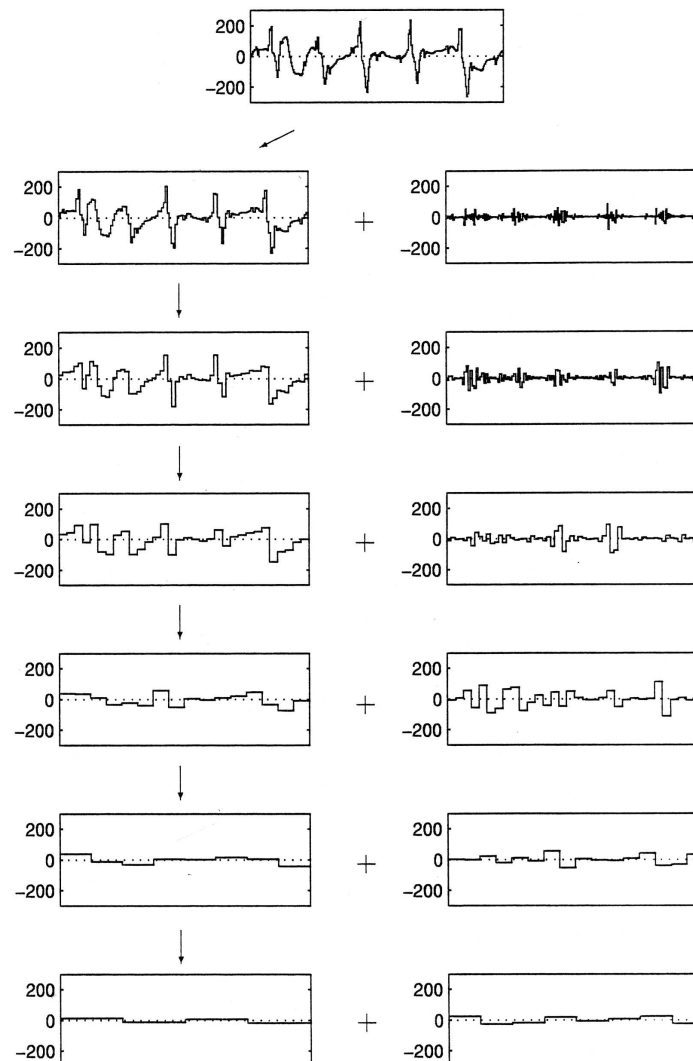


Abbildung 4: Wavelet-Analyse eines EKG-Signals



Aufgabe 1: Eigenschaften der Wavelet-Transformation

In Gl. (1) (Abschnitt 1.1) wird die Wavelet-Transformation als Zeit-Frequenz-Darstellung gegeben. Untersuchen Sie für diese Darstellung die Eigenschaften

- a) Translationsinvarianz und
- b) Affinvarianz.

Aufgabe 2: Wavelet-Transformation einer Exponentialfunktion

- a) Bestimmen Sie die Wavelet-Transformierte des Signals $x(t) = \exp(-\alpha t^2)$ mithilfe des Gabor-Wavelets

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t^2\right) \exp(j2\pi f_0 t).$$

- b) Kann das Signal $x(t)$ aus der Wavelet-Transformierten mithilfe des Gabor-Wavelets rekonstruiert werden?

Aufgabe 3: Multiraten-Filterbank

Das treppenförmige Signal

$$x_0(t) = \sum_{m=0}^7 c_0(m) (\sigma(t - mT) - \sigma(t - (m+1)T))$$

mit

$$c_0(0) = 0 \quad c_0(1) = 2 \quad c_0(2) = 3 \quad c_0(3) = 4 \quad c_0(4) = 4 \quad c_0(5) = 3 \quad c_0(6) = 2 \quad c_0(7) = 0$$

soll mithilfe einer Multiraten-Filterbank in seine Approximationen und Details zerlegt werden. Die Filterkoeffizienten sind vorgegeben:

$$g_{TP}(-1) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_{TP}(0) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_{BP}(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_{BP}(0) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Das zugehörige Wavelet ist definiert als

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Skalierungsfunktion als

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a)** Zerlegen Sie das Signal $x_0(t)$ mithilfe der Multiraten-Filterbank in die Approximationskoeffizienten $c_k(m)$ und die Detailkoeffizienten $d_k(m)$, $k = 1, 2, 3$.
- b)** Berechnen und zeichnen Sie die Projektionen des Signals $x_0(t)$ auf die Funktionenräume V_k und W_k ($k = 1, 2, 3$):

$$x_k(t) = \text{Proj}_{V_k} \{x_0(t)\}$$

$$y_k(t) = \text{Proj}_{W_k} \{x_0(t)\}$$

- c)** Rekonstruieren Sie das Signal $x_0(t)$ zeichnerisch durch Addition von $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ und $x_3(t)$.